الجمهورية العربية السورية

الدراسات العليا

جامعة دمشق

كلية الاقتصاد

ا لموضوع

نظرية الألعاب الإستراتيجية

من إعداد الطالبة :

حياة صغيور

تحت اشرف الأستاذ الدكتور:

جمال اليوسف

السنة الجامعية

2009/2008

خطة البحث :

تمهيد

1- عموميات حول نظرية الألعاب الإستراتيجية.

أ- تعريف نظرية الألعاب الإستراتيجية .

ب- مصطلحات متعلقة بنظرية الألعاب الإستراتيجية.

ج – تطبيقاتها.

د- أنواعها و تقسيماتها .

2- شروط الاثنين ذات المجموع الصفري .

3- لغة الألعاب.

4- الطرق المختلفة لحل مسائل الألعاب الإستراتيجية.

أ- الألعاب الإستراتيجية الصافية.

ب- الهيمنة بتنقيص المصفوفة قدر المستطاع.

ج- الألعاب الإستراتيجية المختلطة.

-حل المسائل من نوع n 2 و m2.

-حل المسائل من نوع nm.

5- خواص مختلفة.

خلاصة.

تمهيد:

كثيراً ما نتعرض في حياتنا إلى مواقف متعارضة (Conflict Situations). حيث يسعى كل منا لتحقيق مصالحه والتي تتعارض مع مصالح الآخرين، والمواقف المتعارضة تعني وجود طرفين تتعارض مصالحهما بحيث تتعارض أهداف الأول مع أهداف الثاني سواء من الناحية العسكرية حيث يلجأ كل طرف من الطرفين المتناحرين إلى كل الوسائل المتاحة لإعاقة الطرف الآخر ومنعه من إحراز النجاح أومن ناحية الاقتصاد وخاصة عند وجود التنافس الحر وتمثل الشركات والمؤسسات الصناعية وغيرها الأطراف المتصارعة.

بالإضافة أن هناك مجالات عديدة في العلوم المختلفة قامت دراستها على بنية المواقف المتعارضة (علوم الحياة والنفس و الاجتماع...).

ولقد أدت الضرورة لتحليل مثل هذه المواقف إلى نشوء جهاز رياضي خاص **فنظرية الألعاب** من حيث الجوهر ما هي إلا نظرية رياضية للمواقف المتعارضة، وهي محاولة لإيجاد توصيات لترشيد السلوك.

إن كل موقف متعارض مأخوذ مباشرة من الحياة العملية يكون معقد أشد التعقيد وليس بالسهولة تحليله لوجود عوامل كثيرة مؤثرة فيه ولكي يمكن تحليل الموقف تحليلاً رياضياً من الضروري التغاضي عن العوامل الثانوية وبناء نموذج شكلي للموقف ومثل هذا النموذج : نسميه باللعبة Game. [1]

1-http://www.kku.edu.sa/CollegesAndInstitutes/ScienceCollege/Math/PicturesGallery/Magazine/Game Theory1.pdf

1- عموميات حول نظرية الألعاب الإستراتيجية:

أ- تعريف نظرية الألعاب الإستراتيجية:

نُعرف إمكانية وضع مسألة تنظيم على شكل منافسة لتحقيق الربح بين شخصين A و B بأنها لعبة إستراتيجية. [1] وهي إحدى الوسائل الحديثة التي تستخدم لاتخاذ القرارات في حال وجود صراع بين الوحدات المتنافسة المستقلة سواءً أفراد أو تنظيمات. [2]

_ و**اللعبة** هي مجموعة من القواعد المحددة لطرائق التأثير (الاستراتيجيات) المتاحة للمتنافسين، وقد يشترك في اللعبة جانبان أو أكثر تتضارب (تتعارض) مصالحهم ويحاول كل منهم تحسين وضعه على حساب الآخرين، في الحالة الأولى تسمى اللعبة ثنائية (بين طرفين) والحالة الثانية تسمى لعبة جماعية، وهنا نظرية الألعاب تهتم بتحديد السلوك الأمثل للاعبين في كل خطوة من خطواته، أثناء سير المباراة حيث يختار إستراتيجية وفق مجموعة القواعد المحددة لعملية الاختيار و وفق الظروف الطارئة في مسار اللعب. [3]

ويحقق استخدام نظرية المباريات في مثل هذه المواقف فائدة كبيرة لمتخذي القرارات. [4]

وتجدر الإشارة هنا أن نجاح أحد هذه الأطراف سيكون على حساب الطرف الآخر أو الأطراف الأخرى، لذا ستكون العلاقة فيما بين الأطراف علاقة تنافس وتناقض في المصالح ومع هذا فلا شك أن محاولة التوصل إلى اتفاق ما من بين العديد من الإمكانيات سيكون أفضل من عدم التوصل إلى أي اتفاق هذا من وجهة نظر

---

[1] صباح الدين بقجة جي، **بحوث العمليات**، منشورات جامعة دمشق، دمشق، 2000، ص 33.
[2] جمال اليوسف، **محاضرات نظرية القرارات الإدارية غير منشورة**، لجنة رابعة إدارة أعمال جامعة دمشق، دمشق،2008.
[3] جمال اليوسف، صباح الدين بقجة جي، **بحوث العمليات**، منشورات جامعة دمشق، دمشق، 2007، ص 126.
[4] منعم زمرير الموسوي، **الأساليب الكمية وبحوث العمليات في الإدارة**، الأردن، 2006، ص 358

الأطراف المعنية لذا فإن من مصلحة الجميع أن يتعاونوا سوياً ويحاولوا المساهمة في المراحل التي يمكن من خلالها التوصل إلى اتفاق واتخاذ قرار معين.[1]

الإستراتيجية: هي عبارة عن بديل أو خطة للعمل تتضمن الإجراءات التي تبين ما يجب على متخذ القرارات أن يفعله في كل حالة تواجهه.[2] لذا سميت بنظرية الألعاب أو المباريات الإستراتيجية.

ب- مصطلحات متعلقة بنظرية الألعاب الإستراتيجية:[3]

في نظرية الألعاب هناك العديد من المصطلحات نذكر من بينها ما يلي:

- لعبة: يعني بشكل خاص معضلة ما حيث نجد (ن) من الأشخاص أو المجموعات يشتركون بمجموعة من القواعد والأنظمة تصنع الظروف والأحداث والتي تشكل بداية اللعبة وتنظم هذه الحركات القانونية الممكنة في كل مرحلة من اللعب، ومجموع الحركات أو الخطوات بمجملها يشكل ماهية اللعبة بالإضافة إلى النتيجة المرغوبة وهنا نفترض أن اللاعبين أشخاص راشدون يسعون إلى سعادتهم عبر اتخاذهم لسلسة من القرارات وأن كل لاعب يسعى للتنبؤ بأفكار وحركات اللاعب الآخر.

- الحركة: في مفهوم نظرية الألعاب فإن الحركة هي التي تنقل اللعبة من مرحلة لأخرى بدءًا من المرحلة الأولى وانتهاءا بالمرحلة الأخيرة. والحركة قد تنتقل من لاعب لآخر بشكل محدد ومتتابع أو معاً وإن قرار اتخاذ الحركة من الممكن أن يكون ناتجاً عن قرار شخصي أو بالصدفة وفي الحالة الأخيرة يوجد غرض مثل حجر النرد أو دولاب الحظ، يحدد الحركة المعطاة وفقاً لآلية الاحتمالات.

[1] منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 358

[2] جمال اليوسف، **محاضرات نظرية القرارات الإدارية** (غير منشورة)، سنة رابعة إدارة أعمال، مرجع سبق ذكره.

[3] http://almashhed.org/vb/showthread.php?t=26493

-الخرج (النصيب): الخرج أو النصيب أو النتيجة وهو مصطلح لنظرية الألعاب يشير إلى ما حدث في نهاية اللعبة في بعض الألعاب مثل الشطرنج أو الداما تكون النتيجة واضحة وبسيطة. وذلك بتحديد الخاسر والرابح، في بعض ألعاب الرهان كالبوكر يكون النصيب هو النقود، وكمية النقود تحدد بعدد الرهانات التي وضعت أثناء اللعب.

- الصيغة الشاملة والصيغة الطبيعية:

يعتبر البحث في الفرق بين الصيغ الشاملة والصيغ الطبيعية من أهم دراسات نظرية الألعاب، ونقول عن لعبة بأنها في صيغتها الشاملة إذا تم تأليفها وفقاً لقواعد تحدد الحركات الممكنة في كل مرحلة، حيث تحدد على أي من اللاعبين عليه الدور كما تحدد الاحتمالات الممكنة التي تنتج عن أي حركة لاعب أسندت إليه بالصدقة، كما تحدد هذه القواعد حجم النصيب– الخرج الممكن الناتج عن خوض اللعبة، كما أنّ الافتراض يقول أن كل لاعب لديه مجموعة من التفضيلات عند كل حركة يشكل توقع للخرج الممكن الذي سيضاعف نصيب اللاعب من النصيب أو يخسر.

– اللعبة في صيغتها الشاملة لا تحتوي فقط على لائحة من القوانين والقواعد التي تحكم تحرك كل لاعب، بل تحتوي أيضاً على مخطط من التفصيلات لكل لاعب، حيث الألعاب الجماعية الشائعة مثل (إكس) أو ألعاب الورق.

إن أبسط الألعاب بصيغتها الشاملة تتضمن كماً هائلاً من المنهجيات والتخطيط لذلك طور الباحثون نمطاً جديداً من الألعاب دعيت بالألعاب بصيغتها الطبيعية، حيث يمكن حساب النتائج بشكل كامل.

وتكون اللعبة بصيغتها الطبيعية إذا أمكن وضع جميع النتائج أو الخرج لكل لاعب في حال اتخاذه أي قرار نابع عن إستراتيجية ممكنة إتباعها، وهذا الشكل من الألعاب النظرية يمكن لعبه عن طريق أي مراقب حيادي لا يتأثر بقرارات يتخذها اللاعبون.

كاملة المعطيات: نقول عن اللعبة أنها المعطيات إذا كانت جميع الحركات الممكنة معرفة لكل لاعب، الداما والشطرنج هما مثالان جيدان للعبة بمعطيات كاملة، البوكر تعتبر لعبة لا يمتلك فيها اللاعبون إلى قدراً محدداً من المعطيات في بداية اللعبة.

المنهج: المنهج أو الخطة هو قائمة للاعب بالخيارات المثلى الممكنة في كل مرحلة من مراحل اللعبة ويعتبر المنهج الذي يؤخذ في الحسبان جميع الحركات الممكنة قبل اتخاذ القرار هو منهج لا يخيب، حيث لا مكان للأحداث المفاجئة بهكذا مناهج.

جـــ- تطبيقات نظرية الألعاب الإستراتيجية:

نجد أن هذه النظرية تتعامل مع مباراة في المنافسة بين طرفين أو أكثر يقومون بعملية اتخاذ القرار وكل واحد من متخذي القرار يسعى لكسب الطرف الآخر والتغلب عليه ولذا فإن نظرية المباريات تعد من الأساليب الحيوية في تكوين الاستراتيجيات في ظل المنافسة والصراع بين الأطراف.

- وقد استخدمت في وضع استراتيجيات الحرب العالمية الثانية وبالتالي هي تستخدم على نطاق واسع في السياسة، كما ترتبط ارتباطا وثيقا بعلم الاجتماع.

- و تستخدم كذلك في المفاوضات التي يعقدها اتحاد العمال مع أصحاب رؤوس الأموال في الغرب.

- وتستخدم كثيراً بواسطة لاعبي الشطرنج في محاولة لكسب مبارياتهم [1] وكذا نجاح بعض الألعاب كالداما وورق اللعب.

* ولقد أشار مؤلفي النظرية جون فون نيومان Neumann وأوسكار مورجينسترن Morgenstern تحت اسم نظرية المباريات والسلوك الاقتصادي بأن الآداة الفعالة لنظرية الألعاب يجب أن ترتبط ارتباطاً وثيقاً بعلم

[1] إسماعيل السيد، **الأساليب الكمية في مجال الأعمال**، الدار الجامعية، الإسكندرية،2001، ص 189

الاقتصاد ونظرية سلوك المستهلك وتعتبر النماذج الاقتصادية وخصوصاً نموذج اقتصاد السوق، سوق المنافسة الكاملة مكاناً مثالياً لاختبار فرضيات نظرية الألعاب، بالإضافة إلى الاستعمال الشديد لنظرية الألعاب في قسم بحوث العمليات الذي يخوض في مسائل تعظيم الأرباح وتخفيض التكاليف. [1]

د- أنواع وتقسيمات لنظرية الألعاب الإستراتيجية:

هناك عدة تقسيمات نذكر منها: [2]

- **الألعاب الساكنة و الديناميكية:**

- نقصد **بالألعاب الساكنة** "**Static**" أن اللاعبين يقوموا باختيار استراتيجياتهم كلهم في نفس الوقت أي أن كلاً منهم يتخذ قراره في نفس اللحظة ولا يستطيع أن يرى أولاً ماذا فعل المنافس ثم يقرر.

- و**الألعاب الديناميكية:** يمكن للاعبين فيها أن يتخذوا قراراتهم الواحد بعد الآخر.

- **الألعاب بمعلومات كاملة أو بمعلومات منقوصة:**

- **الألعاب بمعلومات كاملة:** كل اللاعبين يعرفون نوايا (أي ما هي النتيجة التي يريد المنافس أن يصل إليها**)** منافسيهم ومنافسوهم يعرفون ذلك وهم يعرفون أن منافسيهم يعلمون ذلك.

- **ألعاب بمعلومات منقوصة**، واحد على الأقل من اللاعبين ليس له علم كامل بنوايا منافسيه.

- **الألعاب التعاونية وغير التعاونية:** وهنا التصنيف كان على أساس الاستراتيجيات المستخدمة في المباراة.

[1،2] http://almashhed.org/vb/showthread.php?t=26493

- **الألعاب وفق عدد اللاعبين:** ونجد هنا:

_ لعبة الشخص الواحد/ اللعبة الفردية:

فنجد مثلاً السولتير هي لعبة فردية، حيث لا وجود لتضارب مصالح حقيقية، لأن المصلحة الوحيدة هنا هي مصلحة اللاعب الفردي نفسه وفي هذه اللعبة فإن الحظ أو الصدفة هو بنية اللعبة الأساسية وذلك اعتماداً على خلط الأوراق وعلى ما امتلكه اللاعب من أوراق جيدة وزعت عليه عشوائياً بالرغم من اهتمام نظرية الاحتمالات بالألعاب الفردية إلا أنها لا تعتبر من المواضيع المحببة لدى نظرية الألعاب، حيث لا وجود لخصم يقوم باعتماد منهج مستقل ينافس به خيارات اللاعب الآخر.

_ لعبة ذات شخصين/ ثنائية أو أكثر:

يعتبر نمط الألعاب الثنائية من أكثر الأنماط انتشاراً ويتضمن العديد من الألعاب المألوفة مثل " الشطرنج، الداما ... أو أي لعبة تعتمد على فريقين اثنين، والمعضلات الأكثر صعوبة هي التي تتضمن(ن) لاعب كالألعاب الجماعية مثل: المونوبولي، البوكر أو أي لعبة تتضمن لاعبين متعددين.

إن الألعاب الثنائية قد تم تحليلها بشكل موسع في نظريات الألعاب، والصعوبة الحقيقية في تمديد النتائج التي تم التوصل إليها لتشتمل الألعاب بـــ (ن) لاعب تكمن في توقع التفاعلات الممكنة بين مختلف اللاعبين لأن في الألعاب الثنائية ستكون جميع الخيارات والحركات الممكنة بالإضافة للنتائج ستكون متوقعة، لكن عندما يكون هناك ثلاث لاعبين أو أكثر، فإن احتمالات عشوائية معقدة من الخيارات والفرص تنشأ في ظل الظروف لتشكل تعاوناً أو التحاماً أو اصطداماً بين اللاعبين.

●**الألعاب وفقاً لمجموع العائد الكلي:** ونجد:

- **ألعاب صفرية المجموع:** أي إذا كان مجموع الأرباح والخسائر في نهاية اللعبة صفر: أي اللعبة صفرية المجموع وسيكون في هذه الألعاب كمية الربح أو احتماله مساوياً لكمية الخسارة أو احتمالها أي تقوم على أساس المصالح المتعارضة للطرفين حيث مكسب الطرف الأول مساوياً لخسارة الطرف الآخر ومجموع المنفعة لهما يساوي الصفر في جميع الأحوال.

وهي مصطلح لتحليل التعادل الاقتصادي الذي يعبر الوصول إلى نقطة اللا ربح واللا خسارة أو لا إنتاج ولا امتلاك. سنة 1944 أظهر كل من فون نيومان وأسكار مورغنسن Oskar Morgensten أن أي (ن) شخص لـــ لعبة صفرية المجموع ممكن توسيعها إلى (ن+1) شخص لعبة صفرية المجموع وهكذا فإن ألعاب (ن+1) شخص من الممكن تعميمها من الحالة الخاصة للألعاب الثنائية الصفرية المجموع.

وإحدى أهم المسائل التي أثيرت في هذا المجال هي: مبادئ التعظيم والتخفيض و هي تطبق على جميع الألعاب الثنائية الصفرية المجموع، ويعرف هذا المصطلح بـــ : معضلة تخفيض- تعظيم وقد تم إثباتها عن طريق نيومان سنة1928، ونجح فون بالإثبات استناداً لطرق متعددة.

- **المباراة ذات المجموع غير الصفري:** وتقوم على أساس التعاون والتنافس بين الطرفين بالوقت نفسه، ليس بالضرورة أن ما يكسبه طرف يخسره الطرف الآخر حيث ممكن أن يكسبا معا أو يخسرا معا. [1]

ملاحظة: التحليل الرياضي لنظرية المباريات- عند التوسع في دراستها- على جانب كبير من التعقيد والصعوبة لذا سنتناول بالدراسة أسهل النماذج المعروفة وذات طابع تطبيقي وهذا النموذج يسمى بلعبة الاثنين ذات المجموع الصفري. [2]

[1] جمال اليوسف، **محاضرات في نظرية القرارات** (غ منشورة)، مرجع سبق ذكره.
[2] منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 358.

2- شروط مباراة الاثنين ذات المجموع الصفري:

تُوصف المباريات الثنائية ذات المجموع الصقري عندما يتحقق ما يلي[1]:

أ- عندما يكون الترتيب السلمي لعائد الطرف الأول هو المعكوس التام للترتيب السلمي لعائد الطرف الثاني.

ب- عندما تكون المنفعة للطرفين بالنسبة للنتائج التي تم التوصل إليها ذات مجموع صفرياً وذلك بالنسبة لأي عائد معين، بعبارة أخرى أن القيمة المنفعية لعائد موجب معين بالنسبة للطرف الأول تساوي القيمة المنفعية السالبة للطرف الثاني أي: ما يكسبه الطرف الأول = خسارة الطرف الثاني.

جـ- كذلك يسعى كل متنافس إلى اختيار الإستراتيجية التي تؤدي إلى تعظيم عائده في حالة الكسب والإستراتيجية التي تؤدي إلى تقليل خسارته في حالة الخسارة. [2]

أي أن كل لاعب يتصرف بذكاء (حكمة) أي يختار الإستراتيجية المثلى، ويمكن القول بأن الإستراتيجية تشكل أهم عناصر النظرية، وبشكل عام لا يتمكن اللاعبون من مراعاة قواعد الاختيار بدقة في كل خطوة من خطواتهم أثناء سير المباراة وحسب الظروف الطارئة لكن يمكنهم أن يحددوا بشكل مسبق القرارات التي يجب أن تتخذ تجاه كل حالة طارئة تعترضهم مستقبلاً وهذا يعني أن اللاعب يعتمد إستراتيجية محددة مسبقاً إذا صادفته ظروف معينة. [3]

* ونجد كذلك من بين الافتراضات التي تستند إليها نظرية المباريات بين شخصين ذات مجموع صفري ما يلي: [4]

- يعرف كل شخص أو طرف الاستراتيجيات الممكن إتباعها ومن قبل كل منهما والنتائج.

- يعمل كل طرف على تفضيل بعض النتائج عن غيرها حسب أولويات معينة يعطيها لكل نتيجة.

---

1 منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 358.

2 جمال اليوسف، **محاضرات نظرية القرارات (غ منشورة)**، مرجع سبق ذكره.

3 جمال اليوسف، صباح الدين بقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 126.

4 نعيم نصير، **الأساليب الكمية وبحوث العمليات في الإدارة**، عالم الكتب الحديث، ط1، الأردن، 2004، ص 649،650

– يعرف كل طرف سلم التفضيل والأولويات التي يعطيها الطرف الآخر لكل نتيجة.

– كل طرف يعرف النتائج المترتبة ولكن لا يعرف متى سوف يعتمدها الطرف الآخر.

3– لغة الألعاب الإستراتيجية: [1]

حتى تستوعب الفكرة المستخدمة في نظرية الألعاب، سنعتبر لعبة بسيطة، ولو افترضنا أنه يوجد متجران لبيع الأدوات الكهربائية في مدينة ما A و B وكانت حصة كل متجر من السوق مستقرة حتى الآن، ولكن ربما تتغير هذه الحالة، قام مدير المتجر A بتطوير إستراتيجيتين للدعاية، أحدهما تستخدم المذياع والأخرى تستخدم الإعلانات في الجرائد المحلية وبعد سماع مالك المتجر B الخبر قرر أن يباشر بتحضير برامج دعائية في الإذاعة والجرائد. وتبين مصفوفة المردود المالي (2×2) في الجدول التالي ماذا سيحدث لكل متجر في السوق إذا بدأ المتجران بتطبيق استراتيجياتهما بالدعاية، ويظهر الجدول مردود اللاعب A أما مردودات B فهي بالقيم السالبة.

جدول (01): مصفوفة مردودات اللاعب (A).

استراتيجيات B

استراتيجيات اللاعب A	استخدام المذياع B1	استخدام الجريدة B2
استخدام المذياع A1	5	12
استخدام الجريدة A2	8	6-

هناك إستراتيجيتان فقط لكل لاعب، فإذا كان للمتجر B إستراتيجية ثالثة، فإننا سنتعامل مع مصفوفة مردودات (2×3) ويتم شرح هذه النتائج كالتالي:

[1] نعيم نصير ،الأساليب الكمية و بحوث العمليات في الإدارة، عالم الكتب الحديث،ط1،الأردن،2004،ص 649,650.

جدول (02) نتائج اللعبة

إستراتيجية المتجر A	إستراتيجية المتجر B	النتيجة (في النسبة المئوية للتغيير في حصة السوق)
A_1 استخدام المذياع	B_1 استخدام المذياع	A يربح 5، B يخسر 5
A_1 استخدام المذياع	B_2 استخدام الجريدة	A يربح 12، B يخسر 12
A_2 استخدام الجريدة	B_1 استخدام المذياع	A يربح 8، B يخسر 8
A_2 استخدام الجريدة	B_2 استخدام الجريدة	A يخسر 6، B يربح 6

فالرقم الإيجابي في الجدول يعني أن A يربح وB يخسر أما الرقم السلبي فيعني أن B يربح وA يخسر.

ملاحظة: تجدر الإشارة هنا إلى المفاهيم التالية: [1]

أ- **اللعبة المحدودة:** تسمى اللعبة محدودة إذا كان لدى كل متبار عدد محدد من الاستراتيجيات وغير محدودة إذا كان لدى كل متبار عدد غير محدود من الاستراتيجيات وهذه الحالة تؤدي إلى ظهور استراتيجيات متتابعة.

ب- **الإستراتيجية المثلى:** هي الإستراتيجية التي تضمن للاعب أكبر فرص للربح خلال الجولات المتعددة للعبة (تضمن أقل فرص للخسارة).

جـ- **مصفوفة المدفوعات:** أو مصفوفة المردودات أو تسمى أيضاً مصفوفة العائد، في المباراة النهائية بين اللاعبين A وB نجد استراتيجيات A هي:

A_1,A_2,A_3 ....A_m واستراتيجيات B هي B_1,B_2,B_3 ....B_n

[1] جمال اليوسف، صباح بقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 127.

فإذا اعتمد A الإستراتيجية Ai واعتمد اللاعب B الإستراتيجية Bj فإن A يربح a_{ij} (وإذا كانت $a_{ij} < 0$) فإنه يخسر ويفترض أن a_{ij} معلومة لكل إستراتيجيتين متقابلتين وهذه القيم تعرض على شكل جدول كل سطر هو إستراتيجية صرفة (Ai) لـــ A وكل عمود يشكل إستراتيجية صرفة (Bj) لـــ B ويعرف كذلك هذا الجدول بجدول الدفع أو مصفوفة (الدفع).

4- الطرق المختلفة لحل مسائل الألعاب الإستراتيجية الثنائية ذلت المجموع الصفري:

يمكن في بادئ الأمر توضيح الطرق المختلفة للحل من خلال الشكل(01) :

مبدأ الحل في الألعاب الإستراتيجية:

قبل التطرق للألعاب الإستراتيجية الصافية سنتطرق لمبدأ الحل وكيفية اختيار اللاعبين لاستراتيجياتها. ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالي:

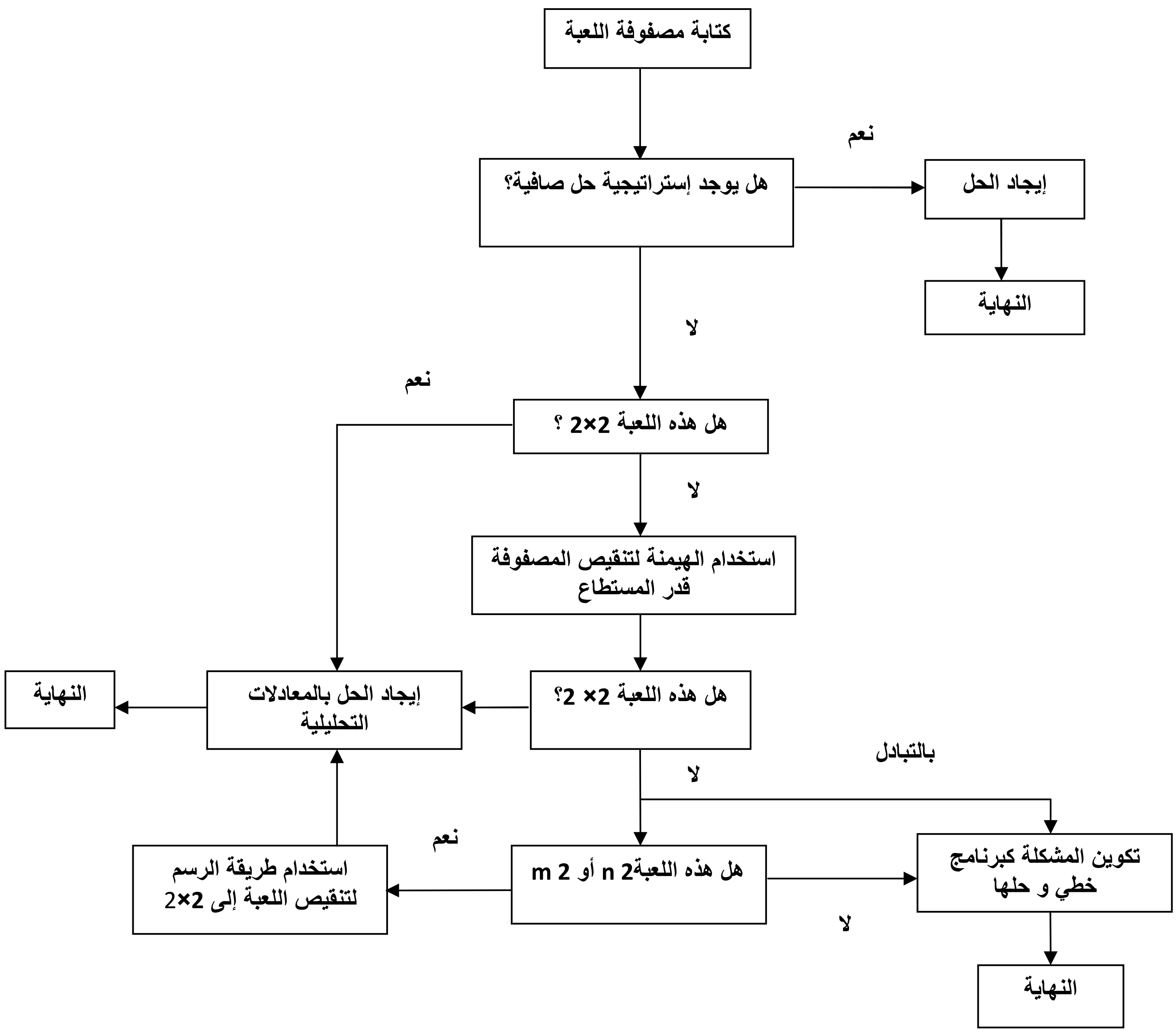
نعتبر اللاعبين (A) و (B) بحيث يمتلك اللاعبين (A) أربع استراتيجيات واللاعب (B) ثلاث استراتيجيات ومصفوفة العائد مكونة من أعداد سالبة وموجبة أو أصفار مع اعتبار أن اللاعبين (A) و (B) على علم بمحتوى الجدول وكلا اللاعبين يجهل اختيار اللاعب الآخر وسواء أتم الاختيار بنفس الوقت أم لا.

وعلى اللاعب(B أن يدفع للاعب A) المبلغ المشار إليه في خانة تقاطع العمود مع الصف في حالة الرقم موجب و العكس صحيح

الآن: بالنسبة لهذين اللاعبين نتصور كل التصرفات الممكنة.

- على سبيل المثال بإمكان اللاعب (B) اختيار العمود (2). بهدف ربح أو كسب 2 ليرة سورية ولكن مثل هذا التصرف يجعلنا عندئذ نحكم على اللاعب (B) بالتهور لأنه يحمل في طياته خطر تعرضه لخسارة (6) ليرات سورية.

شكل (01) مخطط الطريقة حل الألعاب الثنائية بمجموع صفري.



المصدر: نعيم نصير، مرجع سبق ذكره، ص661.

ويمكن لـــ (B) التصرف بطريقة أخرى وكذلك بالتقدير الوسطي وبالتالي ما يأمل تحقيقه من ربح وما يمكن أن يلحقه من خسارة في حال اختياره لهذا العمود أو ذاك، وبالتالي ينتقي العمود الذي له أدنى وسط للخسارة كالتالي:

A \ B	1	2	3
1	3	2-	1
2	3	3	2
3	4-	2	5
4	4	6	0

العمود الأول: ل.س 1.5 = (3+3−4+4) 1/4

العمود الثاني: ل.س 2.25 = (2+3+6+2−) 1/4

العمود الثالث: ل.س 2= (1+2+6+0) 1/4

وهكذا (B) سيتجه نحو العمود الأول على أساس هذا المبدأ نفس الشيء للاعب (A).

ولكن بالأخذ بعين الاعتبار فرضيات نظرية الألعاب الإستراتيجية أي أن: [1]

اللاعبين (A) و (B) (أذكياء وحذرين) بمعنى أنهما سيختاران شكلاً من أشكال التفكير المنطقي وبالتالي يحلل (A) استراتيجياته كل واحد على حدة ويختار الإستراتيجية A_i بهدف تعظيم ربحه (أي تعظيم خسارة (B)) مع الأخذ بالحسبان أن المنافس B سوف يجيب بالإستراتيجية B_j راجياً أن يعجل في ربح (A) في حدوده الدنيا (أي جعل خسائره في الحدود الدنيا) وحل المباراة باعتماد المبدأ الحذر في اتخاذ القرارات يتم من **خلال المعيار المتشائم.** وتجدر الإشارة هنا أن هذا المعيار هو الأنسب باعتبار أن المتنافسان في بيئة لا توجد فيها المعلومات الكافية و بالتالي ضرورة تواجد معيار متحفظ جدا و هو معيار: **أدنى الأقصى – أقصى الأدنى.**[2]

– بالنسبة لـــ (A) يقوم على اختيار أصغر عنصر a_{ij} في السطر i ويرمز له بـــ a_i

أي: $a_i = \text{Min } a_{ij}$, $J=1.2.3 \ldots\ldots m$

---

[1] جمال اليوسف، صباح الدين يقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 128، 129.
[2] حمدي طه، **مراجعة علي محمد أحمد، مقدمة في بحوث العمليات**، دار المريخ، الرياض،ص 558.

يتم تثبيت قيم a_i إلى يمين الجدول على شكل عمود إضافي (أقل الأرباح في كل بسط) ويختار اللاعب الأول (A) الإستراتيجية (A_i) التي تضمن له ربحاً لن يقل عن a_i عندما يتصرف المنافس له بذكاء (حكمة) من الطبيعي أن

$$a^* = \text{Max } a_i \qquad , i = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots m$$

أو

$$a^* = \text{Max } (\text{Min } a_{ij}) \qquad , i = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots m \quad J = 1.2. \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

بحيث a^* تسمى الحد الأدنى للمباراة Max Min النتائج.

إستراتيجية اللاعب A التي تقابل a^* تسمى إستراتيجية أعظم أصغر النتائج.

– ونفس التحليل يتم إجراؤه للاعب B الذي يرغب في التأثير في أرباح (A) وجعلها في حدودها الدنيا. وبالتالي يختار أعظم خسارة يمكن أن تلحق به

أي: $B_j = \text{Max } a_{ij} \quad . i = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots m$

ويختار بعدها (B) الإستراتيجية B^* التي تضمن أنّ خسائره لن تزيد عن B_j التصرف الحذر لــ (B) يتضمن اختياره لـــلإستراتيجية التي تجعل خسائره أقل ما يمكن :

$$B^* = \text{Min } B_j \quad \Rightarrow \quad B^* = \text{Min } (\text{Max } a_{ij}) \quad \begin{cases} i = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots m \\ j = 1.2. \ldots\ldots\ldots n \end{cases}$$

B^* = تسمى الحد الأعلى للمباراة أو Min Max النتائج.

وإستراتيجية اللاعب (B) تسمى إستراتيجية أصغر أعظم النتائج أي B^* هي الحد الأعلى للخسائر التي يمكن أن يتحملها B باعتماد مبدأ الحذر.

وبشكل عام تكون القيمة العليا أكبر أو تساوي القيمة الدنيا.

أي: $Min_i\ Max_j\ aij \geq Max_j\ Min_i\ aij$

: i= 1.2.3 .... n

J= 1.2.3. .... m

بالنسبة للمثال المعطى تكون الاستراتيجيات كالتالي:

	1	2	3	Min	Max
1	3	-2	1	-2	
2	3	3	2	2	2
3	-4	2	5	-4	
4	4	6	0	0	
Max	4	6	5		
Min	4				

$a^* = Max\ (-2,2,-4,0)$

$B^* = Min\ \ (4,6,5\ )$

و $4 \geq 2$

أ- **الألعاب الإستراتيجية الصافية:** لما نجد في جدول المدفوعات أنّ:[1]

$Max_J\ Min_i\ a_{ij} = Min_i\ Max_j\ a_{ij}$

نقول عن اللعبة أن لها نقطة توازن أو (نقطة سرج) ويطلق عليها أيضاً نقطة تعادل أو ارتكاز وهي تمثل a_{ij} في مصفوفة المدفوعات التي تحقق المساواة وقيمة اللعبة (V) : $V= a^* = B^*$ تدعى بالقيمة الصافية ويمكن للعبة أو تحوي نقطة ارتكاز أو أكثر ولكن قيمة اللعبة تبقى دائماً وحيدة.

وكل لاعب يعتمد إستراتيجية وحيدة تسمى إستراتيجية صافية أو خالصة. وهي إستراتيجية مثلى لكلا اللاعبين وليس من مصلحة أحدهما تغير الإستراتيجية.

ويمكن توضيح النقاط المختلفة لنقاط التوازن في الأمثلة التالية:[2]

[1] جمال اليوسف، صباح الدين بقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 129، 130.

[2] أديب كولو، تقديم صلاح الأحمد، **بحوث العمليات التقنيات الكمية في الإدارة**، ط1، دمشق، 1998، ص 365.

	B			Min Max
A	3	4	1–	1–
	3	1	4	1 (1)
Max	3	4	4	
Min	(3)			

لا يحتوي هذا الجدول على أية نقطة توازن.

الجدول (أ)

	B			Min	Max
A	2	4	1-	1–	(1-)
	-3	5	2-	-3	
Max	2	5	1-		
Min			(1-)		

a_{13} تمثل نقطة التوازن.

الجدول (ب)

	B				Min Max
	11	22	38	11	(11)
	10	2–	8–	13	8–
Max	(11)	22	38	13	
Min					

a_{11} تمثل نقاط توازن

الجدول (ج)

	B			Min Max
	2–	3–	4–	4–
	3	8	2	(2)
	5	3	2	(2)
Max	5	8	(2)	
Min				

(a_{33}) ، (a_{23}) تمثلان نقطة التوازن

الجدول (د)

– يمكن في هذا الصدد طرح الحالة التالية كمثال: [1]

تصور أن أحد عقود الامتيازات الفوسفاتية الممنوح لإحدى الشركات العالمية المنقبة عن الفوسفات قد قارب عن الانتهاء وأنه يجب التفاوض من جديد بين الحكومة وبين تلك الشركة لوضع عقد جديد وذلك قبل انتهاء الامتياز الأول. وبفرض أننا استطعنا وضع الجدول التالي الذي يوضح الاستراتيجيات التي سوف يتبعها كل من الفريق الحكومي وفريق الشركة.

الحكومة \ الشركة	1	2	3	4		
1	20	15	12	35	12	12
2	25	14	8	10	8	
3	40	2	10	5	2	
4	-5	4	11	0	0	
Max	40	15	12	35		
Min			12			

– نجد أن في أسوأ الظروف سوف تحصل الحكومة على زيادة قدرها 12 ون عن كل زيادة في الطن المنتج من الفوسفات. وبالتالي الحكومة ستختار الإستراتيجية الأولى. وما يجب ملاحظته أيضاً أنه في أسوأ الظروف ستدفع الشركة للحكومة مبلغ يختلف حسب استراتيجياتها المتبعة.

فعند إتباع الإستراتيجية 1 ستدفع الشركة مبلغ قدره 40 وحدة نقدية.

فعند إتباع الإستراتيجية 2 ستدفع الشركة مبلغ قدره 15 وحدة نقدية.

فعند إتباع الإستراتيجية 3 ستدفع الشركة مبلغ قدره 12 وحدة نقدية.

فعند إتباع الإستراتيجية 4 ستدفع الشركة مبلغ قدره 35 وحدة نقدية.

[1] منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص359، 360.

وحيث أن الشركة تهدف إلى دفع أقل قدر ممكن لأقصى زيادة ممكنة بالإنتاج فإنها ستختار الإستراتيجية التي في أسوأ الظروف ستدفع بموجبها أقل ما يمكن ومما سبق يتضح أن الإستراتيجية التي تحقق هذا الهدف هي الإستراتيجية (3) والتي ستدفع الشركة بموجبها12 ون. والجدول يعطي حلاً توازنياً.

ويلاحظ أنه من الضروري أن يكون لكل حالة صراع نقطة توازن يمكن التوصل إليها كما سنلاحظ في الأمثلة القادمة.

ب- استخدام الهيمنة لتنقيص المصفوفة قدر المستطاع:

يمكن استخدام مبدأ الهيمنة لتنقيص الألعاب وذلك بحذف الاستراتيجيات التي لن تستخدم أبداً، ويمكن حذف إستراتيجية اللاعب إذا كان باستطاعته أن يلعب إستراتيجية أخرى بنفس المستوى أو أعلى، أي يمكن حذف الإستراتيجية إذا كان جميع نتائجها متساوية أو أسوأ من نتائج اللعبة ذات العلاقة بإستراتيجية أخرى. [1]

ويطلق على هذه العملية أيضاً " تبسيط الحل عن طريق السيطرة" [2] ويمكن توضيح هذا من خلال المثال السابق مع إجراء التعديل التالي لنحل الرقم (19) محل الرقم (10) وتناقش الجدول الجديد : [3]

- **في أسوأ الظروف قد تحصل الحكومة على المبلغ الآتي:**

عند إتباع الإستراتيجية (1) ستكون الزيادة في الدخل 12 ون

عند إتباع الإستراتيجية (2) ستكون الزيادة في الدخل 8 ون

عند إتباع الإستراتيجية (3) ستكون الزيادة في الدخل 2 ون

عند إتباع الإستراتيجية (4) سينخفض الدخل الحكومي بمبلغ 5 وحدات ن.

[1] نعيم نصير، مرجع سبق ذكره، ص 660.
[2] أديب كولو، تقديم صلاح الأحمد، مرجع سبق ذكره، ص 379.
[3] منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 361- 363.

لذا فسوف تختار الحكومة الإستراتيجية (1) لتحصل على أكبر قدر ممكن لأقل زيادة ممكنة. أما الشركة ففي أسوأ الظروف ستدفع للحكومة المبالغ التالية:

-عند إتباع الإستراتيجية 1 ستدفع الشركة 40 و ن.

-عند إتباع الإستراتيجية2 ستدفع الشركة 15 و ن.

-عند إتباع الإستراتيجية 3 ستدفع الشركة 19 و ن.

-عند إتباع الإستراتيجية 4 ستدفع الشركة 35 و ن.

الشركة / الحكومة	1	2	3	4	Min / Max
1	20	15	12	35	12
2	25	14	8	10	8
3	40	2	19	5	2
4	5−	4	11	0	5−
Max	40	15	19	35	
Min		15			

ستختار الشركة الإستراتيجية الثانية لتدفع 15 وحدة نقدية، والجدول لا يعطي حلاً توازنياً أي لا يمكن التوصل لاتفاق بين الأطراف المعنية وبالتالي ضرورة الأخذ بمزيج من الاستراتيجيات أي الاستراتيجيات المختلطة والتي سنتطرق إليها فيما بعد.

وعملية تقليص الاستراتيجيات يسهل الحل وسيكون في المثال المعطى كالتالي:

إن الحكومة لا تلجأ على الإطلاق إلى الإستراتيجية الرابعة لأن الإستراتيجية الأولى تطغى عليها أي لو قارنا كل رقم في الإستراتيجية الرابعة بالمقابل له في الإستراتيجية الأولى نجد أن جميع الأرقام في الإستراتيجية الأولى أفضل من الأرقام المقابلة لها في الرابعة هذا بالنسبة للحكومة لذا فيجب إلغاء الإستراتيجية الرابعة، ومن ناحية أخرى لو قارنا كل رقم في الإستراتيجية الثالثة بالرقم المقابل له في الإستراتيجية الأولى نجد بالنسبة للشركة نجد أنه يمكن الاستغناء عن الإستراتيجية الأولى.

ويصبح جدول الدخل الحكومي كالتالي:

لو قارنا أرقام الإستراتيجية الأولى بالمقابل لها في الإستراتيجية الثانية بالنسبة للحكومة فنجد أنه بإمكاننا الاستغناء عن الإستراتيجية الثانية، وبالنسبة للشركة لو قارنا أرقام الإستراتيجية الثانية مع المقابلة لها في الإستراتيجية الرابعة لتوضح انه بإمكاننا الاستغناء عن الإستراتيجية الرابعة. وبالتالي يأخذ الجدول الشكل التالي:

الحكومة \ الشركة	1	2	3	4
1	20	15	12	35
2	25	14	8	10
3	40	2	19	5
4	-5	4	11	0

وبعد التوصل إلى لعبة من نوع (2×2) نحاول استخلاص مزيج من الاستراتيجيات للوصول إلى اتفاق بين الأطراف للوصول إلى قيم المزيج هناك طريقتين إما بالرسم البياني أو بالمعادلات. وهذا وفق الألعاب الإستراتيجية المختلطة.

الحكومة \ الشركة	2	3
1	15	12
3	2	19

ج- الألعاب الإستراتيجية المختلطة "المركبة"

تستخدم هذه الطريقة في حالة أن استخدام إستراتيجية Max Min – Min Max في الحالة العامة لا يعطي الحل الأمثل للعبة لذا تنشأ فكرة استخدام الاستراتيجيات المركبة، واللاعب بدلاً من اختيار إستراتيجية خالصة يمكنه اختيار مجموعة من الاستراتيجيات المركبة باحتمالات محددة بشكل مسبق. [1]

ولتكن $x= (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ و $y= (y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_m)$ مجموعة احتمالات كل من اللاعب A واللاعب B لاستراتيجياتها الخالصة

[1] جمال اليوسف، صباح الدين بقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 130.

بحيث: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} xi = \sum_{j=1}^{m} yj \\ x_i , y_j \geq 0 \quad \text{جميع } i , j \end{cases}$

وإذا كان a_{ij} يمثل العنصر (ij) من مصفوفة المدفوعات فإن مصفوفة المدفوعات تأخذ الشكل التالي:[1]

	$y_1\ y_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ Y_m$
X_1	$a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{2m}$
X_2	$a_{21}\ a_{22} \ldots\ldots\ldots\ a_{2m}$
.....	....
.....	....
X_n	$a_{n1}\ a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{nm}$

ومبادئ إيجاد حل اللعبة اعتماد الاستراتيجيات المختلطة (المركبة) تبنى أيضاً على القاعدة المتشائمة Min Max الفرق الوحيد يتلخص في كون اللاعب A يختار x_i على نحو يحقق أعظم توقع رياضي للربح (الأمل الرياضي للربح) من أصغر القيم الموجودة في الأعمدة، واللاعب B يختار Y_i على نحو يحقق أصغر توقع رياضي للخسائر الموجودة في الأسطر وبالتالي:[2]

اللاعب A يختار الإستراتيجية التي تحقق:

$$\begin{cases} \text{Max}_{xi} \{ \text{Min} (\sum_{i=1}^{m} a_{i1}xi , \sum_{i=1}^{m} a_{i2}xi \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i) \ \} \\ \sum x_i = 1\text{،} \sum y_j = 1 \end{cases}$$

وهذه القيمة تعرف بـ: أعظم توقع رياضي لأقل دخل يحققه A أما اللاعب B فيختار الإستراتيجية التي تحقق

$$\text{Min}_{yj} \{ \text{Max} (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j , \sum_{i=1}^{n} a_{2j}y_j \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} a_{mj}y_j) \ \}$$

وتعرف هذه القيمة بــ أصغر توقع رياضي لأعظم الخسائر تلحق B وهذه الاستراتيجيات كما في حالة الاستراتيجيات الخالصة تحقق العلاقة:

أعظم توقع رياضي لأقل دخل $\leq$ أصغر توقع رياضي لأعظم الخسائر.

[1] جمال اليوسف، صباح الدين بقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 131.
[2] نفس المرجع، ص 131- 132.

– قيم yi و xi التي تشكل الحل الأمثل تحقق المساواة التامة للعلاقة أعلاه والقيمة النهائية تساوي التوقع الرياضي الأمثل لقيمة المباراة.

هذا يستنتج من قاعدة أصغر أعظم النتائج (القاعدة الحذرة) وتعرض هنا دون إثبات.

إذا كانت قيم yi^* و xi^* تشكل حلاً أمثل لكلا اللاعبين فإن كل عنصر من جدول المدفوعات يقابله قيمتان (احتمالان) xi^* و yi^* وبالتالي التوقع الرياضي لقيمة المباراة هو:

$$Y^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^*_i y^*_j \quad : \quad \sum x^*_i = 1 \ , \ i= 1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$\sum y^*_j = 1 \ , \ j= 1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots m$$

توجد عدة طرائق معروفة لإيجاد الإستراتيجية المثلى yi^* و xi^* في لعبة ثنائية مساوية للصفر، وفي الفقرات التالية سنشير إلى ثلاث مسائل ثنائية الأولى من النوع 2n أي لدى اللاعب (A) إستراتيجيتان فقط ولدى اللاعب الثاني n>2 إستراتيجية، ومسألة من النوع m2 وهاتان المسألتان يتم حلهما هندسياً فقط، والمسألة الثالثة من النوع mn ويعرض حلها بجداول السمبلكس.

والآن يتم حل المثال السابق مسألة من نوع 2×2 :

– يمكن إيجاد حل اللعبة ذات الإستراتيجية المختلطة (2×2) بيانيا وكذا بطريقة المعادلات كالتالي: [1]

بيانياً:

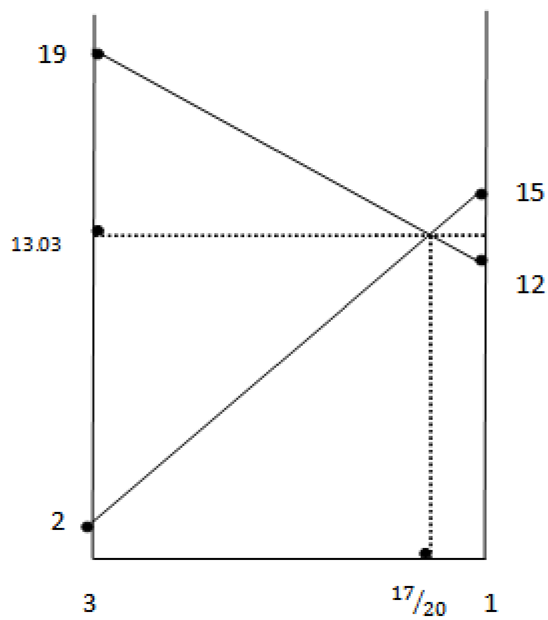
– نرسم خط أفقي وعلى طرفيه خطين عموديين مدرجين أحدهما يمثل الإستراتيجية الأولى والثاني يمثل الإستراتيجية الثالثة هذا بالنسبة للحكومة.

– لو فرضنا أن الشركة سوف تأخذ الإستراتيجية (2) فإن قيمة الإستراتيجية (1) بالنسبة للحكومة تساوي 15 وقيمة الإستراتيجية الثالثة تساوي 2 ويتم تعيين على المحور الذي يمثل الإستراتيجية (1) للحكومة نقطة (15)

[1] منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 363، 365.

وعلى المحور المقابل الذي يمثل الإستراتيجية الثالثة النقطة (2) ثم يتم الوصل بينهما ونقوم بنفس الشيء لما تتبع الشركة الإستراتيجية رقم (3).

ومن نقطة تقاطع المستقيمين نسقط ذلك على المحور الأفقي والعمودي والنقطة المسقطة على المحور العمودي تمثل قيمتها: قيمة المباراة= 13.05 و ن.



طريقة المعادلات:

لنفرض أن المزيج الذي نبحث عنه هو عبارة عن:

x_1 % من الإستراتيجية الأولى

و x_2 % من الإستراتيجية الثالثة للحكومة.

لنفرض أن المزيج الذي نبحث عنه هو عبارة عن x_1 % من الإستراتيجية الأولى و x_2 % من الإستراتيجية الثالثة للحكومة. نفس الشيء بالنسبة للشركة. وعند نقطة التقاطع لا بد من تحقيق الشرط التالي:

$15x_1 + 2x_2 = 12x_1 + 19x_2$ 1

$\Longrightarrow$ $15x_1 + 12x_1 = 19x_2 - 2x_2$

بحيث: X_1 : تمثل احتمال اللاعب (الحكومة) لاختيار إستراتيجيتها الأولى.

X_2: تمثل احتمال الحكومة لاختيار إستراتيجيتها الثالثة.

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = {}^{17}/_{3}\ x_2 \\ \text{ولكن} \\ x_1 + x_2 = 100\% = 1 \\ \text{أي} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = {}^{17}/_{3}\ x_2 \\ x_1 = 1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0.85 \\ X_2 = 0.15 \end{cases}$$

بتعويض قيم x_1 و x_2 في أحد طرفي المعادلة 1 نجد قيمة المباراة.

$$\begin{cases} 15(0.85) + 2(0.15) = 13.05 \\ 12(0.85) + 19(0.15) = 13.05 \end{cases}$$

وعند التعويض في الطرف الثاني نحصل على نفس النتيجة:

وبهذا فإن الزيادة عن كل طن فوسفات ينتج ويجب أن يكون 13.05 وحدة نقدية.

– للتوضيح أكثر نقترح المثال التالي: [1]

ترغب المؤسسة العامة لتربية الأبقار بتجديد العقد المبرم مع شركة الألبان ولكن بعائد أكبر وفيما يلي الجدول الذي يبين الاستراتيجيات التي سوف تأخذ بها كل من المؤسسة والشركة بغية الوصول إلى اتفاق وذلك بأن تحصل المؤسسة من الشركة على زيادة عن كل لتر مكعب ينتج من الحليب كما يلي:

والمطلوب: أوجد أفضل إستراتيجية تستطيع المؤسسة إتباعها للحصول على أقصى زيادة ممكنة.

[1] منعم زمرير الموسوي، مرجع سبق ذكره، ص 368- 370.

الشركة / المؤسسة	ش1	ش2	ش3	ش4
م1	60	45	36	105
م2	75	42	24	30
م3	120	6	57	15
م4	15-	12	33	0

– الحل: تحت أسوأ الظروف تحصل المؤسسة على :

Min	Max
م1 36	
م2 24	
م3 6	
م4 15-	

– يتم اختيار أفضل الأسوأ وهو الرقم: 36

وتحت أسوأ الظروف تدفع الشركة المبالغ التالية:

Max	Min
ش1 ← 120	
ش2 ← 45	
ش3 ← 57	
ش4 ← 105	

– ويتم اختيار أقل رقم من الأرقام أعلاه (45) ويلاحظ بأنه لا توجد هناك نقطة توازن بين الاستراتيجيات المختلفة للمؤسسة وللشركة.

– لذلك نلجأ إلى حل المشكلة باعتماد الإستراتيجية المختلطة بالشكل التالي:

– يتم شطب بعض الاستراتيجيات لكلاً من المؤسسة والشركة عندما تطغى أرقام الاستراتيجيات عن بعضها البعض حيث نجد بالنسبة للمؤسسة بأن أرقام الإستراتيجية الأولى (م1) تطغى على الأرقام المقابلة للإستراتيجية الرابعة (م4) حيث يتم شطب (م4)، وكذلك نلاحظ بالنسبة للشركة أن الإستراتيجية الثانية (ش2) تطغى أرقامها على الإستراتيجية (ش1) حيث يتم شطب (ش1)، كما نلاحظ أن (م1) تطغى أرقامها على (م2) حيث يتم شطب

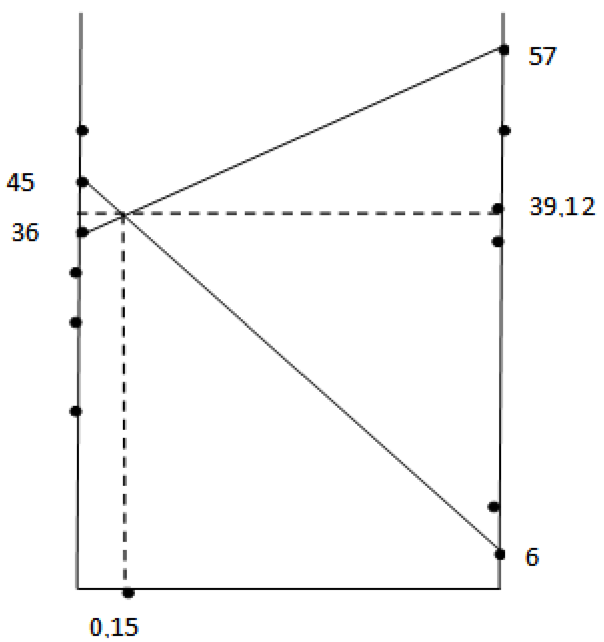
(م2) أما بالنسبة للشركة يلاحظ بأن أرقام الإستراتيجية (ش2) هي أفضل من الأرقام المقابلة لها في الإستراتيجية (ش4) وعلى هذا الأساس يتم شطب (ش4).

و منه يصبح جدول الاستراتيجيات معطى بالشكل التالي :

الشركة / المؤسسة	ش1	ش2	ش3	ش4
م1	60	45	36	105
م2	75	42	24	30
م3	120	6	57	15
م4	15-	12	33	0

الشركة / المؤسسة	ش2	ش3
م1	45	36
م3	6	57

- الحل باستخدام الرسم البياني كالتالي:



		الشركة / المؤسسة
36	45	
57	6	

باعتبار:

X_1 : هو نسبة تطبيق المؤسسة لـــ م1 .

X_2 : هو نسبة تطبيق المؤسسة لـــ م3 .

y_1 : هو نسبة تطبيق للشركة لـــ ش2 .

y_2 : هو نسبة تطبيق للشركة لـــ ش3 .

– الزيادة المتوقعة التي تحصل عليها المؤسسة عند إتباع الشركة ش$_2$ يعبر عنها ب: $\alpha = 45\ X1\ +\ 6\ X2$

– الزيادة المتوقعة التي تحصل عليها المؤسسة عند إتباع الشركة ش$_3$ يعبر عنها ب: $\beta = 36\ X1\ +\ 57\ X2$

ب مساواة 1 مع 2 نجد:

$$\alpha = \beta \Longrightarrow 45X_1 + 6X_2 = 36X_1 + 57X_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 45X_1 - 36X_1 = 57X_2 - 6X_2 \\ \text{بالإضافة إلى أن:} \\ X_1 + X_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 9x_1 = 51x_2 \\ X_1 = 1 - x_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X_1 = 0.85 \\ X_2 = 0.15 \end{cases}$$

بالتعويض في طرفين المعادلة (3) نجد:

$$\Longrightarrow 45(0.85) + 6(0.15) = 36(0.85) + 57(0.15)$$

$$\longrightarrow \alpha = \beta = 39.15$$

إذن مقدار الزيادة التي تحصل عليها المؤسسة وتمثل 39.15 ون.

ويتم إتباع نفس الطريقة بالنسبة للشركة:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 45\,y_1 + 36\,y_2 \\ \beta_1 = 6y_1 + 57y_2\end{array}\right\} \quad \alpha_1 = \beta_1 \Longrightarrow 45\,y_2 = 6y_1 + 57\,y_2 \ldots\ldots\quad 1$$

$$\Longrightarrow 45y_1 - 6y_1 = 57y_2 - 36y_2$$

$$\Longrightarrow 39\,y_1 = 21\,y_2$$

$$\Longrightarrow y_1 = \frac{21}{39}\,y_2 - - - - - 2$$

و لدينا أيضاً: $y_1 + y_2 = 1$

ومنه $y_1 = 1 - y_2$

أو $y_2 = 1 - y_1 \ \ldots\ldots\ldots\ 3$

يمكن تعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) سنجد:

$$y_1 = \frac{21}{39} = (1 - y_1)$$

$$y_1 = \frac{21}{60} = 0.35$$

$$y_2 = \frac{39}{60} = 0.65$$

نتيجة اللعبة	معامل X	معامل Y	النتيجة
45	0.85x	0.35x	13.3875
36	0.85x	0.65x	19.89
6	0.15x	0.35x	0.315
57	0.15x	0.65x	5.5575
اللعبة المتوقعة			39,15

بتعويض قيمة y_1 و y_2 في المعادلة (1) سنجد:

$$45\ (21\ /\ 60\ )\ +\ 36\ (\frac{39}{60})\ =\ 6\,(\frac{21}{60})\ +\ 57\ (\frac{39}{60})\ =\ 39\ .15$$

يمكن حساب قيمة المباراة المتوقعة بعد حساب قيم x_1،x_2، y_1، y_2 كما هي موضحة في الجدول أعلاه.

الحل الهندسي للألعاب:

جــ-2- المسألة من نوع (n،2) و (2، m):

يمكن تطبيق الحل البياني على المباريات التي يوجد لأحد لاعبيها أو كلاهما إستراتيجيتين فقط، ومع افتراض

المباراة من نوع (2×n) التالية: [1]

A \ B	y_1 y_2 .... y_i
X_1	a_{11} a_{12} .... a_{1n}
$1- x_1 = x_2$	a_{21} a_{22} .... a_{2m}

مع افتراض عدم وجود نقطة سرج في المباراة

ويترتب على وجود إستراتيجيتين للاعب A أن:

$$\begin{cases} X_2 = 1 - X_1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

بحيث: X_1 نسبة اعتماد الإستراتيجية الأولى

X_2 نسبة اعتماد الإستراتيجية الثانية

وهذه النسبة سواء لــ X_1 أو لــ X_2 قيمتها $[0 - 1]$ أي:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 \\ 0 \leq X_2 \leq 1 \end{cases}$$

ملاحظة : الفرق بين النسبة والاحتمال

النسبة: تستخدم في تكرار عدد قليل من المرات.

الاحتمال: تستخدم في تكرار عدد كبير من المرات.

ــ وبالتالي ستكون عوائد اللاعب (A) المتوقعة والمقابلة للاستراتيجيات B كما يلي:

- فنلاحظ أن الربح المتوقع لــ A إذا طبق B حصراً الإستراتيجية y_1:

$a_{11} x_1 + a_{21} x_2$ .... (1)

(1) $\Longleftrightarrow$ $a_{11} x_1 + a_{21} (1-x_1)$ لأن : $x_2 = 1 - x_1$

$\Longrightarrow$ $X_1 (a_{11} - a_{21}) + a_{21}$

[1] حمدي طه، مرجع سبق ذكره، ص 562، 563.

ونفس الشيء إذا طبق B حصراً الإستراتيجية y_2 أو y_3 أو .... y_j.

الإستراتيجية الصافية للاعب B	العائد المتوقع للــ اللاعب A
1	$(a_{11} - a_{21})\, x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\, x_1 + a_{22}$
.	....
.	
n	$(a_{1n} - a_{2n})\, x_1 + a_{2n}$

ــ ومن خلال الجدول نستنتج أن التوقع الرياضي في لربح اللاعب A مرتبط بــ x_1 بعلاقة خطية.

– لذا يجب على اللاعب A أن يختار قيمة x_i التي ستحقق الأقصى من ضمن أدنى العوائد المتوقعة وذلك وفقاً لمعيار أدنى الأقصى لمباريات الإستراتيجية المختلطة ويمكن تحقيق ذلك من خلال رسم خطوط مستقيمة كدوال للاحتمال x_1 وذلك كحل هندسي للمسألة.

على النحو التالي: [1]

-يرسم محور أفقي وحيد ومحوران عموديان وتترك بينهما مسافة مقبولة تضمن وضوح الشكل البياني.

-يدرج المحور الأفقي من (0) عند المحور الأول إلى (1) عند المحور الثاني وهذا التدريج له معنى مختلف حسب نوع المسألة المدروسة حيث يمثل قيمة التغير الذي حسبت قيمة اللعبة بدلاً من قيمة x_1 أوx_2 في المسألة من النوع (n.2) وقد يكون y_1 أو y_2 في المسألة من النوع (m.2).

-يدرج المحوران العموديان وهذا التدريج له معنيان حسب الحالة المدروسة:

*إذا كانت المصفوفة من النوع (2.n) التدريج على المحور الأول يمثل المدفوعات المقابلة للإستراتيجية الأولى في الأسطر أي قيم a_{1j} عندما تكون X_1=0 والتدريج على المحور الثاني يمثل المدفوعات المقابلة للإستراتيجية

[1] جمال اليوسف، صباح الدين بقجة جي، مرجع سبق ذكره، ص 134، 135.

الثانية في الأسطر أي قيم a_{2j} عندما تكون X_1=1.

*إذا كان في المصفوفة من النوع (m،2) يمثل التدريج على المحور الأول المدفوعات المقابلة للإستراتيجية الأولى في الأعمدة أي قيم a_{i1} عندما تكون y_1=0 والتدريج على المحور الثاني يمثل المدفوعات المقابلة للإستراتيجيات الثانية في الأعمدة أي قيم a_{i1} عندما تكون y_1= 1

تمثل كل قيمة من قيم المباراة لكل إستراتيجية خالصة أو معرفة للاعب الذي لديه n أو m إستراتيجية بخط مستقيم.

تقاطع المستقيمات يحدد منطقة الحلول المسموح بها، والحل الأمثل للعبة يقابل أبعد نقطة على المحور الأفقي من المنطقة الداخلية المتشكلة من تقاطع المستقيمات إذا كان اللاعب يعتمد قاعدة Max Min

أما الحل للاعب الذي يعتمد قاعدة Min Max فيقابل أقرب نقطة من نقاط المنطقة الخارجية المتشكلة من تقاطع المستقيمات إلى المحور الأفقي.

قيمة المباراة تساوي مسقط نقطة الحل على أي من المحورين العمودين وقيمة x_i و y_i التي تحققها تساوي مسقط نقطة الحل على العمود الأفقي.

ــ سيتم توضيح هذه الخطوات بحل المثالين التاليين:

B

A	4	6
	4	5
	5	4
	0	8

B

A	5	8	8	7
	6	5	4	6

*** حل المثال الأول – من نوع (2،N)**

B / A	1	2	3	4	Min	Max
1	5	8	8	7	5	5
2	6	5	4	6	4	
Max	6	8	8	7		
Min	6					

هذه المباراة لا تحتوي نقطة توازن لأن:

$$MaxMin = 6 \neq Min\, Max = 5$$

– التوقع الرياضي لربح اللاعب A والمقابل لإستراتيجيات B الخالصة معروضة في الجدول التالي:

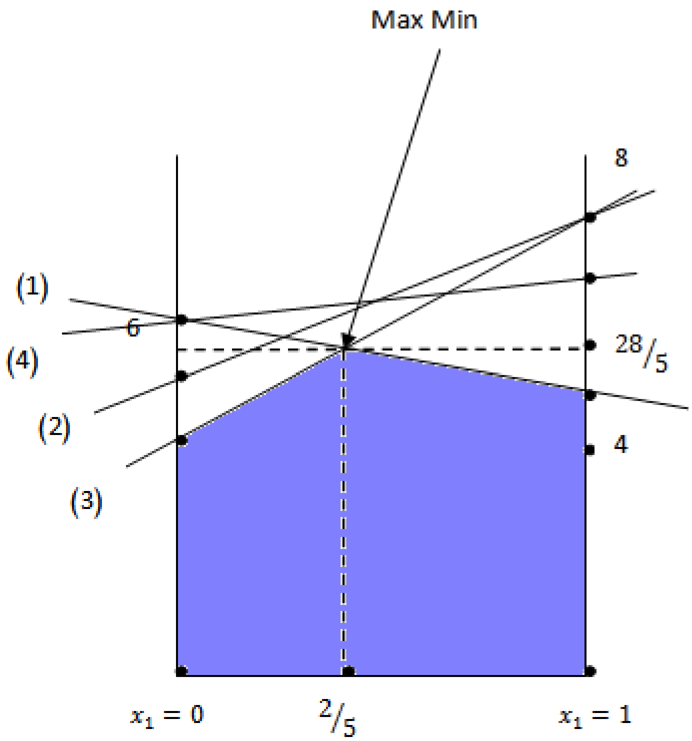
إستراتيجيات B الخالصة	التوقع الرياضي لربح A
1	$-x_1 + 6$
2	$3x_1 + 5$
3	$4x_1 + 4$
4	$x_1 + 6$

ــ يتم تمثيل المعادلات الخطية هندسياً كالتالي:

– هناك مستقيمان يمران بنقطة التقاطع Max Min هذا يعني أن الإستراتيجية المثلى لــ B تحوي إستراتيجيتين خالصتين وهما (1) و (3) أي أن:

$$\begin{cases} Y_1 + Y_3 = 1 \\ Y_2 + Y_4 = 0 \end{cases} \quad \text{وبالتالي} \quad Y_3 = 1 - Y_1$$

يمكن إيجاد الحل بيانياً ورياضياً كما يلي:



$-x_1 + 6 = 4x_1 + 4$

$\Rightarrow 5x_1 = 2$

$\Rightarrow x_1 = 2/5$

$\Rightarrow x_2 = 3/5$

لأن: $x_2 + x_1 = 1$

بتعويض قيمة x_1 في المعادلة الأولى أو الثالثة نجد قيمة المباراة v.

$$-(\frac{2}{5}) + 6 = 4(\frac{2}{5}) + 4 = 5\ \frac{28}{5} = v$$

إذن:

$$\begin{cases} x^*_1 = 2/5 \\ x^*_2 = 3/5 \end{cases}$$

قيمة المباراة : $v = \frac{28}{5}$

– والتوقع الرياضي لخسائر اللاعب B والمقابلة

للإستراتيجيات الخالصة للاعب A تعطى في الجدول:

الخسائر المتوقعة لــ B	الإستراتيجيات الخالصة A
$-3y_1 + 8$	1
$2y_1 + 4$	2

تحسب y_1 بمساواة المعادلتين (1) و(2) كالتالي:

$$-3\,y_1 + 8 = 2\,y_1 + 4 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (*)$$

$$(*) \Longrightarrow 5y_1 = 4$$

$$\Longrightarrow y_1 = \frac{4}{5}$$

ومنه $y_3 = 1/5$ لأن: $y_1 + y_3 = 1$

بتعويض قيمة y_1 في أحد المعادلات نجد قيمة المباراة.

وهذه القيمة تساوي قيمة المباراة بالنسبة للاعب A وهكذا يتم التوصل إلى نقطة توازن أي : Max Min= Min Max وليس من مصلحة أي لاعب تغيّر الإستراتيجية.

المثال لحل مباراة من نوع (m-2):

يمثل الجدول مصفوفة الدفع لمباراة بين لاعبين: A لديه 4 إستراتيجيات. وB لديه إستراتيجيتين فقط. هذه المباراة ليس لها نقطة توازن لأن: Max Min≠ Min Max.

B

A		1	2	Min	Max
	1	4	6	4	
	2	4	5	4	4
	3	5	4	4	
	4	0	8	0	
	Max	5	8		
	Min	5			

وبنفس طريقة الحل السابقة لدينا:

Y_1: نسبة اعتماد B على الإستراتيجية الأولى

Y_2: نسبة اعتماد B على الإستراتيجية الثانية.

بحيث
$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = 1 \\ Y_1\,,\, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

والخسائر المتوقعة لـــ B في الجدول التالي:

الإستراتيجيات الخالصة لـــ A	الخسائر المتوقعة لـــ B
1	$-2y_1+6$
2	$-y_1+5$
3	y_1+4
4	$-8y_1+8$

– بعد إنشاء المعادلات الخطية بيانياً: نلاحظ أن نقطة الحل الأمثل MaxMin هي أقرب نقطة في المنطقة الخارجية. المحددة بقاطع المستقيمين (1) و (3).

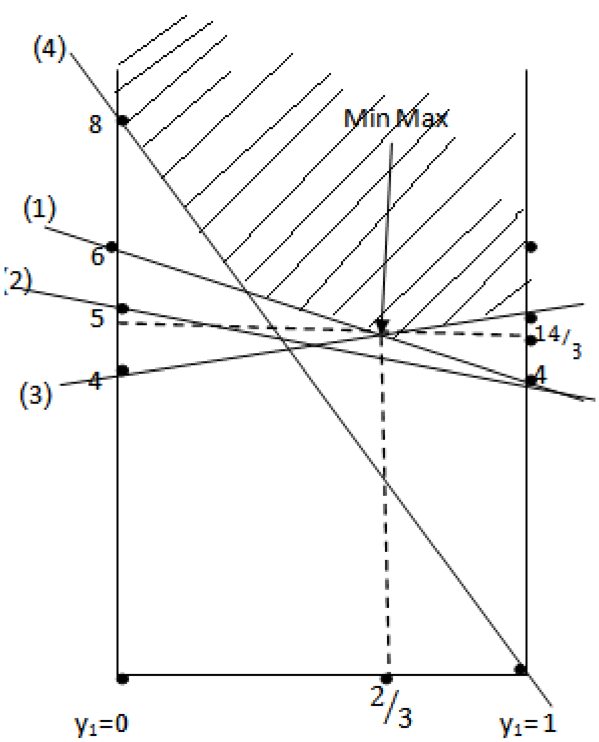
ومنه نحصل على قيمة y^*_1 المثلى من مساواة المعادلتين (1) و (3)

$$-2y_1+6=y_1+4 \Rightarrow y_1=\frac{2}{3}$$

ومنه $y_2=\frac{1}{3}$ لأن: $y_1+y_2=1$ بتعويض قيمة y_1 في أحد المعادلتين نجد:

$$v=-2\left(\frac{2}{3}\right)+6=\frac{14}{3}$$

$$v={}^{14}/_{3}$$



– تقابل المستقيمات المتقاطعة في النقطة Min Max الإستراتيجيتين (1) و (3). للاعب A هذا يعني: اعتماده على هاتين الإستراتيجيتين أي:

$$x_1+x_3=1$$

$$x_2=x_4=0$$

والتوقع الرياضي لربح اللاعب A المقابل لإستراتيجيات الخالصة للاعب B معطى كالتالي:

إستراتيجيات B الخالصة	التوقع الرياضي لربح A
1	$-x_1 + 5$
2	$2x_1 + 4$

الإستراتيجية المثلى للاعبA التي تحقق المساواة بين قيمة المباراة للإستراتيجيتين الخالصتين (1) و (3): $x_1 + 5 = 2x_1 + 4$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = {}^{1}\!/_{3}$$

ونجد أن $x_3 = 2/3$ لأن $x_1 + x_3 = 1$

بتعويض قيمة x_1 في إحدى المعادلتين نجد قيمة المباراة v

$$v = -\left(\frac{1}{3}\right) + 5 = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{14}{3}$$

وقيمة المباراة : $v = 14/3$

جـ–3 – حل اللعبة من نوع (m.n): طريقة السمبلكس في حل المباراة من النوع (m.n).

توجد علاقة بين نظرية المباريات وبين البرمجة الخطية حيث يمكن التعبير عن أي مباراة ذات لاعبين بالنتيجة صفر كنموذج برمجة وبالمثل يمكن تمثيل أي نموذج برمجة خطية في شكل مباراة، وتظهر فائدة هذا الحل بصورة أكبر في حالة المباريات ذات المصفوفات الكبيرة. [1] وخاصة لما تنعدم إمكانية تحويل الجدول من نوع nm إلى الشكل m2 أو n2 ونشير هنا أنه يمكن استخدام الحاسبات في حل المسائل الكبيرة.

إن الإستراتيجية المختلطة المثلى للاعب (A) يجب أن تحقق الهدف التالي:

[1] حمدي طه، مرجع سبق ذكره، ص 567- 570.

$$\text{Max}_{x_i}\{\text{Min}\,(\textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i\,,\,\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i\,\ldots\ldots\ldots\ldots\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i)\}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad ، \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m \end{cases}$$

ويمكن وضع هذه المشكلة في شكل نموذج برمجة خطية كما يلي:

بافتراض: $v = \text{Min}\,(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i\,,\,\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i\ldots\ldots\ldots\ldots\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i)$

تصبح المسألة تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} \text{Max} = v & \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,x_i \geq v & i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 & j = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ x_i \geq 0 & \end{cases}$$

بحيث v هي قيمة اللعبة

ويمكن تبسيط صياغة البرمجة الخطية السابقة من خلال قسمة كل القيود و(عددها n+1) علىv وسيكون ناتج القسمة صحيحاً طالما أن v> 0. أما إذا كانت v< 0 فيجب عكس اتجاه المتراجحات الممثلة لقيود المشكلة. وبطبيعة الحال لا يمكن إجراء عملية القسمة عندما تكون v=0 ويمكن التغلب على هذه المشكلة بإضافة رقم ثابت موجب K إلى كل خلايا مصفوفة العائد وبذلك تضمن أن قيمة المباراة للمصفوفة المعدلة ستكون دائماً أكبر من الصفر. ثم يتم التوصل إلى القيمة الحقيقية للمباراة من خلال طرح K من القيمة المعدلة للمباراة.

وبصفة عامة إذا كانت قيمة أقصى الأدنى للمباراة غير سالبة، فستكون قيمة المباراة أكبر من الصفر (بشرط عدم وجود نقطة سرج للمباراة).

وبناء على ذلك، وبافتراض أن V> 0، ستصبح قيود البرمجة الخطية كما يلي:

$$a_{11}\frac{x_1}{v}+a_{21}\frac{x_2}{v}+\dots+a_{m1}\frac{x_m}{v}\geq 1$$

$$a_{12}\frac{x_1}{v}+a_{22}\frac{x_2}{v}+\dots+a_{m2}\frac{x_m}{v}\geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}\frac{x_1}{v}+a_{2n}\frac{x_2}{v}+\dots+a_{mn}\frac{x_m}{v}\geq 1$$

$$\frac{x_1}{v}+\frac{x_2}{v}+\dots+\frac{x_m}{v}=\frac{1}{v}$$

وبفرض أن: $i = 1,2,3,\dots\dots\dots\dots m$ ، $X_1 = {x_1}/{v}$ وحيث أن:

$$\max\ v \Leftrightarrow \min\ \frac{1}{v}=\min(\ X_1+\dots\dots+Xm\ )$$

إذن تصبح المشكلة

المطلوب تدنية : $Z= x_1 + x_2 + \dots\dots + x_m$

بشرط أن:

$a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + \dots + a_{m1}\,x_m \geq 1$

$a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{m2}\,x_m \geq 1$

$a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_m \geq 1$

$x_1, x_2 , \dots\dots X_m \geq 1$

وتصبح مشكلة اللاعب B كمايلي:

$\text{Min}_{yj}\{\ \text{Max}\ (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j\ ,\sum_{i=1}^{n} a_{2j}y_j \dots\dots\dots\dots \sum_{i=1}^{m} a_{mj}y_j)\ \}$ بشرط أن:

$$\begin{cases} Y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ Y_j \geq 0 \qquad , \ j= 1.2.\ \dots\dots\ n \end{cases}$$

ويمكن التعبير عن ذلك في شكل نموذج برمجة خطية أيضاً كما يلي:

المطلوب تعظيم: $w = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$

بشرط أن:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n \le 1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n \le 1 \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \ldots + a_{mn} y_n \le 1 \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \ge 0 \end{cases}$$

بحيث:

$$\begin{cases} w = \frac{1}{v}, \; y_i = \frac{y_i}{v} \\ j = 1.2. \ldots n \end{cases}$$

لاحظ أن مشكلة اللاعب B تمثل النموذج الثنائي لمشكلة اللاعب A. يفهم من ذلك أن الحل الأمثل لمشكلة لاعب معين ستعطى تلقائياً الحل الأمثل للاعب الآخر. ويمكن حل مشكلة اللاعب B باستخدام طريقة السمبلكس العادية، كما يمكن حل مشكلة اللاعب A باستخدام طريقة السمبلكس الثنائية. ويتم اختيار أي من الطرقتين (السمبلكس العادية أو السمبلكس الثنائية) بناء على أي من المشكلتين تتضمن عدداً أصغر من القيود، بمعنى أن اختيار طريقة الحل يتوقف على عدد الإستراتيجيات الصافية لكل لاعب.

مثال: افتراض المباراة (3×3) الآتية:

A \ B	1	2	3	Min Max
1	3	-1	-3	-3
2	-3	3	-1	-3
3	-4	-3	3	-4
Max	3	3	3	3-
Min		3		

وحيث أن قيمة أقصى الأدنى maxi min value =3، إذن يمكن أن تكون قيمة المباراة سالبة أو صفر. ولذلك يتم إضافة القيمة الثابتة K إلى كل عناصر المصفوفة حيث يفترض أن 3≤ K، تصبح المصفوفة كما يلي:

وبذلك سيكون نموذج البرمجة الخطية لمشكلة اللاعب B كما يلي:

B \ A	1	2	3
1	8	4	2
2	2	8	4
3	1	2	8

المطلوب تعظيم : $W = Y_1 + Y_2 + Y_3$

بشرط أن:

$$\begin{cases} 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1 \\ 2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1 \\ 1Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وسيكون جدول الحل الأمثل النهائي كما يلي:

متغيرات الحل	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	كميات الحل
W	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196
Y_1	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14
Y_2	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
Y_3	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49

وبناء على ذلك، سنجد بالنسبة للمشكلة الأصلية أن:

$$v^* = \frac{1}{w} - K = 196/45 - 5 = -29/45 \quad \begin{cases} y_1^* = \dfrac{y_1}{w} = \dfrac{1/14}{45/196} = 14/45 \\ y_2^* = \dfrac{y_2}{w} = \dfrac{11/196}{45/196} = 11/45 \\ y_3^* = \dfrac{y_3}{w} = \dfrac{5/49}{45/196} = 20/45 \end{cases}$$

ويتم التوصل إلى الإستراتيجيات المثلى للاعب A من الحل الثنائي للمشكلة السابقة، حيث نجد أن:

$Z = w = 45/196,\ x_1 = 5/49,\ x_2 = 11/196,\ x_3 = 1/14$

ومن ثم:

$X^*_1 = x_1/z = 20/45, \quad X^*_2 = x_2/z = 11/45, \quad X^*_3 = x_3/z = 14/45$

– **خواص مختلفة:** – هناك عدة خواص نذكر منها: [1]

أ– يقال عن لعبة مستطيلة بأنها عادلة إذا كانت معدومة القيمة.

ب– ثبات الحلول المثلى وهذا إذا:

-إذا أضفنا إلى كل عناصر الجدول نفس الكمية ولتكن (α) فإن الإستراتيجيات المثلى لن تتغير وإنما تتغير فقط قيمة اللعبة حيث تصبح ($v+\alpha$) و خاصة إذا أضفنا إلى كل عناصر المصفوفة الكمية ($\alpha= -v$) فإن اللعبة تصبح عادلة.

-إذا ضربنا كل عناصر الجدول بنفس الكمية ولتكن ($o<k$) فإن الإستراتيجيات المثلى لن يطرأ عليها أي تغيير ولكن قيمة اللعبة تصبح ($k.v$) ويمكن استخدام هذه الحالة للتخلص من بعض الأعداد الكسرية التي تثقل العمليات الحسابية.

-إذا كان (a_{ij}) هو العنصر المتواجد في الصف (i) والعمود (j) وإذا كانت (v) قيمة اللعبة فإن المصفوفة التي تكون فيها قيم العناصر مساوية إلى ($\alpha+ka_{ij}$) حيث ($k>o$) فإن لهذه اللعبة نفس الإستراتيجيات المثلى التي تملكها اللعبة ذات العناصر (a_{ij})، ومن جهة أخرى فإن قيمة اللعبة ذات العناصر ($\alpha+ka_{ij}$) تصبح ($\alpha+kv$).

-إذا ضربنا كافة عناصر المصفوفة بـــ (-1) فإننا نحصل على لعبة جديدة يتبدل فيها اللاعبين. " تغيّر إشارة قيمة اللعبة "

[1] أديب كولو، مرجع سبق ذكره، ص 377، 378.

خلاصة:

إن نظرية الألعاب الإستراتيجية هي حالة من حالات اتخاذ القرار في ظل عدم التأكد مشتملة على طرفين(خصمين) أو أكثر على درجة من الذكاء حيث سيحاول كل منهما تحقيق أقصى منفعة له على حساب الآخر .

و نظرا للتعقيدات الرياضية لهذه النظرية فقد تناولنا جانب الألعاب المكونة من فردين و محصلة المجموع النهائي لها مساوية للصفر .

و لها عدة طرق حسب الحالة ، ففي اللعبة ذات الإستراتيجية الصافية يمكن الحصول على استراتيجيات اللاعبين بدون إجراء أي حسابات رياضية أما في حالة عدم وجود إستراتيجية صافية او مايطلق عليها أحيانا نقطة ارتكاز لكلا اللاعبين من الضروري استخدام طرق أخرى مثل طريقة الإستراتيجية المختلطة أو الهيمنة و البرمجة للألعاب (n.m) .

و هنا تجدر الإشارة إلى معيار التوقع الرياضي الذي لا يمكن تطبيقه في كثير من الحالات و بشكل خاص عندما يتخذ القرار في الحالات النادرة .

ومن جهة يجب الإشارة إلى عدم كفاية نظرية الألعاب في حل العديد من مسائل الاختيار الجماعي لأنها :

-لا تأخذ بالحسبان العامل النفسي للاعبين و ميولهم و حبهم للمخاطرة و كذا احتمال خطأ متخذي القرار ... و هنا يعد اللاعب حكيما من وجهة نظر نظرية الألعاب و يختار الإستراتيجية الأكثر حذرا ، و بالتالي يختار أفضل الاستراتيجيات الممكنة و يفترض أن اللاعب المنافس سوف يختار الإستراتيجية المثلى للاعب المنافس الآخر.

- نظرية الألعاب من البداية تعد أن اللاعب يعتمد في اختياره على معيار وحيد و مجموعة معايير في عملية اتخاذ قراراته و قد يقوده هذا إلى اتخاذ قرارات مصطنعة و غير سليمة .

قائمة المراجع :

أولا :الكتب .

- كولو أديب ، تقديم صلاح الأحمد، **بحوث العمليات التقنيات الكمية في الإدارة،** ط1، دمشق، 1998.
- السيد إسماعيل ، **الأساليب الكمية في مجال الأعمال،** الدار الجامعية، الإسكندرية،2001.
- الموسوي منعم زمرير ، **الأساليب الكمية وبحوث العمليات في الإدارة،** الأردن، 2006.
- اليوسف جمال ، صباح الدين بقجة جي، **بحوث العمليات،** منشورات جامعة دمشق، دمشق، 2007 .
- بقجة جي صباح الدين ، **بحوث العمليات،** منشورات جامعة دمشق، دمشق، 2000.
– طه حمدي ، **مراجعة علي محمد أحمد، مقدمة في بحوث العمليات،** دار المريخ، الرياض
- نصير نعيم ، **الأساليب الكمية وبحوث العمليات في الإدارة،** عالم الكتب الحديث، ط1، الأردن، 2004.

ثانيا :مواقع الانترنيت.

_http://almashhed.org/vb/showthread.php?t=26493

_http://www.kku.edu.sa/CollegesAndInstitutes/ScienceCollege/Math/Pictures Gallery/Magazine/Game Theory1.pdf

ثالثا : محاضرات .

جمال اليوسف، **محاضرات نظرية القرارات الإدارية غير منشورة،** لسنة رابعة إدارة أعمال جامعة دمشق، دمشق،2008.